Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
07.04.2022

Lineare Algebra II
Blatt 2

---

1 | Wieviellinear?

Prüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen Bilinearformen sind:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \mapsto 3x_1y_2$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2)\big) \mapsto x_1x_3 + y_2$$

$$h\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) \mapsto {x_1}^2y_1 + x_2 + y_2$$

Prüfen Sie für jede Bilinearform ferner, ob sie alternierend, symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

2 | Bibabasiswechsel

Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der Standardbasis durch folgende darstellende Matrix gegeben ist:

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass auch

$$B := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie die darstellende Matrix $M_B(\beta)$.

3 | Abakus

Zeigen Sie, dass für die folgenden $(n+1)\times(n+1)$-Matrizen gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} = (a+nb)(a-b)^n$$

$$\det \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n(n+1)\cdot a_1\cdots a_n$$

4 | Blockiert

Seien A und D zwei quadratische Matrizen, sagen wir $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ und $D \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$, und sei $B \in \mathrm{Mat}_K(n \times m)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D).$$

Zeigen Sie andererseits, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C)$$

selbst für quadratische Matrizen A, B, C, $D \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ im Allgemeinen *nicht* gilt.

5 | Vielkammersystem

Zeigen Sie, dass für Untervektorräume $E_1, \dots, E_n$ eines Vektorraums V gilt:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \quad \Leftrightarrow \quad \Bigg(V = \sum_{i=1}^{n} E_i \ \text{ und } \ \underbrace{E_j \cap \Big(\sum_{i\colon i \neq j} E_i \Big) = \{\mathbf{0}\} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\}}_{*} \Bigg)$$

(vgl. Definition 4.21). Zeigen Sie ferner, dass für $n > 2$ die Bedingung $(*)$ *nicht* ersetzt werden kann durch die einfachere Bedingung $E_i \cap E_j = \{\mathbf{0}\}$ für $i \neq j$.

6 | Pythagoras

Zeigen Sie die folgenden beiden Gesetzmäßigkeiten in einen euklidischen Vektorraum.

(a) Für zueinander orthogonale Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gilt der Satz des Pythagoras:

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$$

(b) Für beliebige Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gilt die Parallelogrammgleichung:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

Inwiefern beweist Ihr Beweis zu (a) den aus der Schule bekannten Satz des Pythagoras?

Abgabefrist: 25.04.2022, 10:15 Uhr.